Espacios métricos

Una distancia en un conjunto X es una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:
a) $d(x, y) \geq 0$ para cualesquiera $x, y \in X$, y $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
b) $d(x, y) = d(y, x)$ para cualesquiera $x, y \in X$.
c) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$ (Desigualdad triangular).
Al número $d(x, y)$ se llama distancia de x a y.
Un espacio métrico es un par (X, d) formado por un conjunto X y una distancia d en X.

Ejemplo. La distancia usual en $\mathbb{R}$ esta definida por $d(x, y) = |x - y|$.

Ejemplo. Dados $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, la distancia euclidea d_2 de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ se define como

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots (x_n - y_n)^2}.$$

La distancia Manhattan d_1 de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ se define como

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \ldots |x_n - y_n|.$$

La distancia del supremo d_∞ de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ se define como

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

Espacios métricos

Ejemplo. Sea X un conjunto cualquiera. La métrica discreta en X viene dada por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Ejemplo. En el espacio $l_\infty = \{(x_n) \subset \mathbb{R} \mid (x_n) \text{ acotada}\}$, la función

$$d((x_n),(y_n)) = \sup\{|x_n - y_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

es una métrica.

Ejemplo. En el espacio $\mathcal{C}^0([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$, la función

$$\rho(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

es una métrica.

Ejemplo. Dado un conjunto de palabras de longitud n, la distancia de Hamming entre dos palabras del conjunto se define como el número de lugares en que difieren. Por ejemplo, si trabajamos con cadenas de 0 y 1 se tendría que $d(1011101, 1001001) = 2$.

Observación. Es fácil ver que las funciones anteriores son distancias.

Espacio topológico inducido por una métrica

Dado (X, d) espacio métrico y dados $x \in X$, $\varepsilon > 0$, la bola de radio ε centrada en x es el conjunto $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.
La bola cerrada de radio ε centrada en x es el conjunto $\bar{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$.

Ejercicio. ¿Cómo son las bolas en las métricas de los ejemplos anteriores?

Teorema. Sea (X, d) un espacio métrico. La familia $\mathcal{B} = \{B_d(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ es una base de topología en X.
La topología definida por $\mathcal{B}$ se denota $\mathcal{T}_d$ y se dice que está inducida por d.

Demostración. Igual a la de la topología usual en $\mathbb{R}$.

Ejemplos. Las distancias d_1, d_2, d_∞ en $\mathbb{R}^n$ inducen todas las topología usual en $\mathbb{R}^n$.
Dado X conjunto, la métrica discreta en X induce la topología discreta en X.

Teorema. Si (X, d) es un espacio métrico, $(X, \mathcal{T}_d)$ es un espacio T_2.

Caracterizaciones mediante sucesiones en espacios métricos

Proposición. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y solo si existe una sucesión de puntos de A que converge a x.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $x \in \overline{A} \Rightarrow$ para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B_d(x, \frac{1}{n}) \Rightarrow (x_n) \to x$.
$\Leftarrow$) Sea $x \in X$ y supongamos que existe $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \to x$.
Sea $U \in \mathcal{U}^x \Rightarrow$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$. Por tanto $x \in \overline{A}$.

Proposición. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$. Entonces f es continua en $x \in X$ si y solo si para cualquier sucesión $(x_n) \to x$ se tiene $f(x_n) \to f(x)$.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $x \in X$ y sea $(x_n) \longrightarrow x$.
Sea V un entorno de $f(x) \Rightarrow f^{-1}(V)$ es un entorno de $x \Rightarrow$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}(V)$ para $n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in V$ para $n \geq n_0$. Por tanto $(f(x_n)) \to f(x)$.
$\Leftarrow$) Vamos a ver que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$.
Sea $x \in \overline{A} \Rightarrow$ existe $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x) \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$ (pues $f(x_n) \in f(A)$).

Observación. Solo hemos usado la distancia d en la demostración de $\Rightarrow$ en el primer caso y en la de $\Leftarrow$ en el segundo. Las otras implicaciones son por tanto ciertas en cualquier espacio topológico.

Teorema del recubrimiento de Lebesgue

Lema. Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$ un conjunto compacto. Entonces la función $d : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, K) = \inf\{d(x, y) \,:\, y \in K\}$ es continua y para cada $x \in X$ existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$.

Teorema del recubrimiento de Lebesgue. Sea $\mathcal{A} = \{U_i \mid i \in I\}$ un recubrimiento abierto del espacio métrico compacto (X, d). Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $A \subset X$ es tal que $\operatorname{diam}(A) < \delta$, existe $i \in I$ tal que $A \subset U_i$.
El número δ se denomina **número de Lebesgue** para el recubrimiento $\mathcal{A}$.

Demostración. Si $X \in \mathcal{A}$ el resultado es cierto para todo $\delta > 0$.
Supongamos que $X \notin \mathcal{A}$.
Sea $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}\}$ un subrecubrimiento finito de $\mathcal{A}$ y sea $C_i = X \setminus A_{i_1}$.
Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i)$, continua por el Lema.
Dado $x \in X$, existe i_j tal $x \in A_{i_j} \Rightarrow d(x, C_i) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$.
Como f es continua, existe $\delta = \min f > 0$. Veamos que $\delta =$número de Lebesgue.
Sea $B \subset X$ tal que $\operatorname{diam}(B) < \delta$. Entonces $B \subset B(x_0, \delta)$, con $x_0 \in B$.
Sea $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $d(x_0, C_{i_0})$ es el mayor de los valores $d(x_0, C_i)$.
Entonces $d(x_0, C_{i_0}) \geq f(x_0) \geq \delta$ y por tanto $B \subset B(x_0, \delta) \subset A_{i_0}$.

Propiedades de separación (más allá de T_2)

Sea X un espacio topológico T_1. Se dice que X es:

a) regular si dados $x \in X$ y B cerrado con $x \notin B$ existen U, V abiertos disjuntos tales que $x \in U$, $B \subset V$.

b) normal si dados A, B cerrados disjuntos, existen U, V abiertos disjuntos tales que $A \subset U$, $B \subset V$.

Observación. normal $\Rightarrow$ regular $\Rightarrow$ T_2.

Ejemplos. a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es normal (ver teorema siguiente).
b) $\mathbb{R}_{[\ ,\ )} \times \mathbb{R}_{[\ ,\ )}$ es regular (fácil), pero no es normal (ver Munkres).

c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_K})$, con $\mathcal{B}_K = \mathcal{B}_u \bigcup \{B \setminus K \mid B \in \mathcal{B}_u\}$, donde $K = \left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, es T_2 (fácil) pero no regular (no se puede separar el punto 0 del cerrado K).

Teorema. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces es normal.

Demostración. Dados A y B cerrados disjuntos de X. para cada $a \in A$, elegimos δ_a tal que $B(a, \delta_a) \cap B = \emptyset$, y para cada $b \in B$, elegimos δ_b tal que $B(b, \delta_b) \cap A = \emptyset$.
Entonces $U = \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{\delta_a}{2})$ y $V = \bigcup_{b \in B} B(b, \frac{\delta_b}{2})$ son abiertos disjuntos tales que $A \subset U$, $B \subset V$.

Espacios metrizables

Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, se dice que X es **metrizable** si existe una distancia d en X tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Teorema de metrización de Urysohn. Si X es un espacio topológico regular con una base numerable, entonces X es metrizable.

La demostración pasa por probar que todo espacio regular con una base numerable es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}^\omega$ con la distancia uniforme dada por $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup \left\{ \bar{d}_u(x_i, y_i) \mid i \in J \right\}$, donde $\bar{d}_u(x_i, y_i) = \min\{|x_i - y_i|, 1\}$.

Observación. El recíproco no es cierto pues aunque todo espacio métrico es regular, no tiene porque tener una base numerable. Un ejemplo es $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$.